

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 32

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

5p 1. Rezultatul calculului $6 - 6 \cdot (10 - 20 : 2)$ este egal cu

5p 2. Dacă $\frac{5a}{3} = \frac{20}{b}$, atunci numărul $5ab$ este egal cu

5p 3. Produsul elementelor mulțimii $M = \{x \in \mathbb{N} | x - 2 \leq 2\}$ este egal cu

5p 4. Linia mijlocie a trapezului $ABCD$ este $MN = 12 \text{ cm}$. Suma lungimilor bazelor acestui trapez este egală cu ... cm .

5p 5. În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCD A' B' C' D'$. Unghiul dreptelor BD și AA' are măsura de ...° .

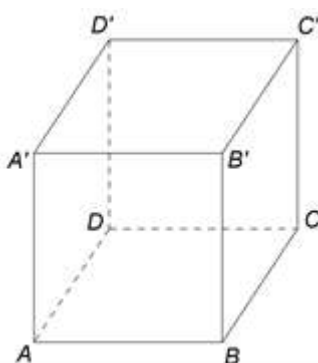


Figura 1

5p 6. În tabelul de mai jos sunt prezentate rezultatele obținute de elevii unei școli la un test.

Punctaj	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	6	14	15	15	25	25

Conform informațiilor din tabel, probabilitatea ca, alegând un elev din această școală, acesta să aibă la acest test un punctaj mai mic sau egal cu 8 este egală cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un trapez dreptunghic $ABCD$ cu $m(\angle DAB) = 90^\circ$ și bazele AB și CD .

5p 2. Determinați numerele naturale de două cifre care împărțite pe rând la 6 și la 15 dau de fiecare dată restul 5 .

5p 3. Un automobil a parcurs un traseu în trei etape. În prima etapă a parcurs cu 20 km mai puțin decât $\frac{2}{3}$ din lungimea traseului, în a doua etapă a parcurs cu 15 km mai mult decât $\frac{3}{5}$ din rest, iar în ultima etapă, restul de 65 km . Determinați lungimea traseului parcurs de automobil.

4. Se consideră numerele reale $a = \sqrt{3}(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) - 2(\sqrt{24} + 3)$ și $b = |5 - 3\sqrt{3}| + 2\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$.

5p a) Arătați că $a = 3$.

5p b) Arătați că numărul $n = \frac{a+b}{2}$ aparține intervalului $(3, 2\sqrt{3})$.

5p 5. Se consideră expresia $E(x) = ((x+4)^2 - 3(x+4) - 1)(x^2 + 5x - 3) + 9$, unde x este număr real. Arătați că, pentru orice număr natural a , numărul $E(a)$ este pătratul unui număr natural par.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un paralelogram $ABCD$ cu $AB=10\text{ cm}$, $AD=6\text{ cm}$ și $m(\angle BAD)=45^\circ$. În exteriorul paralelogramului $ABCD$ se construiesc pătratele $ADEF$ și $ABMN$.

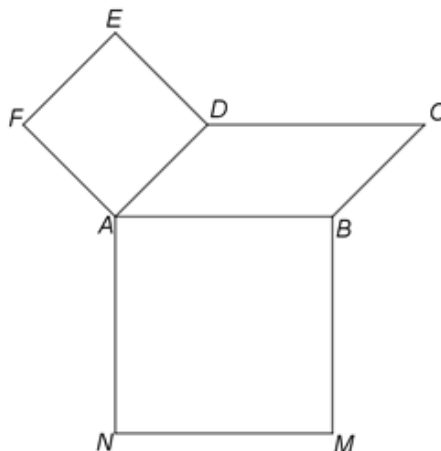


Figura 2

5p a) Arătați că perimetrul patrulaterului $ABCD$ este egal cu 32 cm .

5p b) Calculați aria patrulaterului $ABCD$.

5p c) Demonstrați că punctul A este ortocentrul triunghiului CFN .

2. În *Figura 3* este reprezentat un pătrat $ABCD$ cu $AB=12\text{ cm}$ și dreptele AM , BN , CP și DQ , perpendiculare pe planul (ABC) , astfel încât punctele M , N , P și Q sunt situate de aceeași parte a planului (ABC) și $AM=2\text{ cm}$, $BN=8\text{ cm}$, $CP=10\text{ cm}$ și $DQ=4\text{ cm}$. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD , iar punctul E este mijlocul segmentului MP .

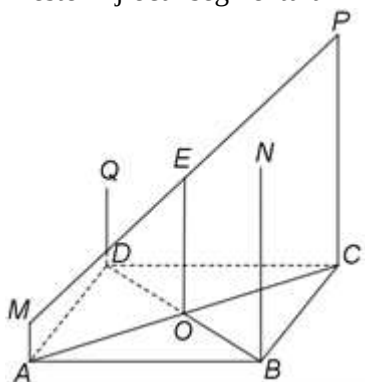


Figura 3

5p a) Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 72 cm^2 .

5p b) Demonstrați că dreapta EO este perpendiculară pe planul (ABC) .

5p c) Demonstrați că punctele M , N , P și Q sunt coplanare.

TESTUL 32: REZOLVARE

SUBIECTUL I: 1) $6 - 6 \cdot (10 - 20 : 2) = 6 - 6 \cdot (10 - 10) =$
 $= 6 - 6 \cdot 0 = 6 - 0 = 6$

2) $\frac{5a}{3} = \frac{20}{b} \Leftrightarrow 5a \cdot b = 3 \cdot 20 = 60;$

3) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 2 \leq 2\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$$x - 2 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2 + 2 \Leftrightarrow x \leq 4$$

Produsul elementelor mulțimii M este $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$.

4) $MN = \frac{B+b}{2} \Leftrightarrow 12 = \frac{B+b}{2} \Leftrightarrow B+b = 2 \cdot 12 = 24 \text{ (cm)}.$

5) $\begin{matrix} AA' \perp (ABC) \\ BD \subset (ABC) \end{matrix} \mid \Rightarrow AA' \perp BD \text{ (O dreaptă } \perp \text{ pe plan este } \perp \text{ pe orice}$
 $\Downarrow \text{ dreaptă din plan.)}$
 $m(\widehat{AA'B}) = 90^\circ.$

6) probabilitatea = $\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

Nr. cazuri posibile = nr. elevi din școală = $6 + 14 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 25 =$
 $= 20 + 30 + 50 = 100.$

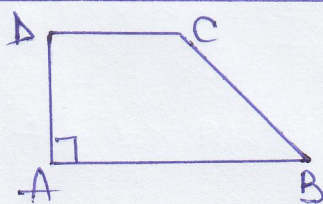
Nr. cazuri favorabile = nr. elevi cu punctaj $\leq 8 = 15 + 15 +$
 $+ 14 + 6 = 50.$

$p = \frac{50}{100} = \frac{5^2}{10} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$

[Obs: Sunt ok oricare din răspunsurile.

SUBIECTUL al II-lea: 1)

2) $\begin{cases} n : 6 = C_1 \text{ rest } 5 \\ n : 15 = C_2 \text{ rest } 5 \end{cases} \Rightarrow$



$\Rightarrow (n-5) : 6 \text{ și } (n-5) : 15$, deci $n-5$ este un multiplu comun al numerelor 6 și 15.

$$\begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ \text{c.m.m.m.c} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \end{array}$$

Deci $n-5 \in M_{30}^* = \{30; 60; 90\}$,
ținând cont că n are 2 cifre $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-5 = 30 \Rightarrow n = 35 \\ n-5 = 60 \Rightarrow n = 65 \\ n-5 = 90 \Rightarrow n = 95 \end{cases}$$

R: Numerele căutate sunt
35; 65 și 95.

3.) Notăm cu x lungimea traseului

În prima etapă a parcurs $\frac{2}{3}x - 20$ km.

I-au ramas de parcurs pentru etapele urmatoare

$$X - \left(\frac{2}{3}X - 20\right) = {}^3)X - \frac{2}{3}X + 20 = \frac{3X - 2X}{3} + 20 =$$

In a doua etapă a parcurs $\frac{3}{5} \left(\frac{x}{3} + 20 \right) + 15 =$
 $= \frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{x}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{3}}{5} \cdot 20 + 15 = \frac{x}{5} + 12 + 15 = \frac{x}{5} + 27 \text{ (km)}.$

In ultima etapă a parcurs 65 km.

Avem ecuația: $\frac{2}{3}x - 20 + \frac{x}{5} + 27 + 65 = x$ (*)

$$\Leftrightarrow \overset{5)}{\frac{2}{3}x} + \overset{3)}{\frac{x}{5}} + \overset{15)}{72} = \overset{1)}{x} \quad | \cdot 15 \quad \Leftrightarrow 10x + 3x + 15 \cdot 72 = 15x$$

$$\Leftrightarrow 15x - 10x - 3x = 15.72 \Leftrightarrow 2x = 15.72 \Leftrightarrow x = \frac{15.72}{2} \Leftrightarrow x = 7.86 \text{ (€)}$$

$$\Leftrightarrow x = 15.36 \Rightarrow x = 30.18 \Rightarrow x = 540 \text{ (km)}, \quad \frac{2}{1}$$

R: Lungimea bazei este de 540 km.

4) a) $a = \sqrt{3}(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) - 2(2\sqrt{6} + 3) =$
 $= 4\sqrt{6} + 9 - 4\sqrt{6} - 6 = 3.$

$$\begin{aligned} b) \quad b &= \underbrace{|5 - 3\sqrt{3}|}_{<0} + 2\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ 5 \square 3\sqrt{3} \quad (.) \\ 25 \square 27 \end{array} \right. \\ &= 3\sqrt{3} - 5 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \\ &= 3\sqrt{3} - 5 + 3 - \sqrt{3} + 2 = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

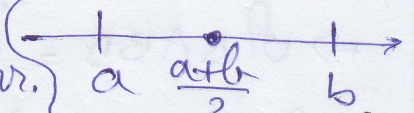
Deci $a = 3$ și $b = 2\sqrt{3}$.

$$n = \frac{a+b}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$$

Deci n aparține intervalului:

$(3, 2\sqrt{3})$, find media aritmetică a celor 2 nr.

Media aritmetică a două numere a și b se află pe axă la jumătatea intervalului $(a; b)$



Metoda a $\bar{u}-a$: $n \in (3; 2\sqrt{3}) \Leftrightarrow 3 < n < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 < \frac{3+2\sqrt{3}}{2} < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 6 < 3+2\sqrt{3} < 4\sqrt{3} \mid (\cdot)^2 \Leftrightarrow 36 < 21+12\sqrt{3} < 48 \mid (-21) \Leftrightarrow 15 < 12\sqrt{3} < 27 \mid :3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5 < 4\sqrt{3} < 9 \stackrel{(\cdot)^2}{\Leftrightarrow} 25 < 48 < 81 \text{ (A)},$$

$$5) E(x) = (x^2 + 8x + 16 - 3x - 12 - 1)(x^2 + 5x - 3) + 9 =$$

$$= (x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x - 3) + 9 =$$

$$= x^4 + 5x^3 - 3x^2$$

$$+ 5x^3 + 25x^2 - 15x$$

$$+ 3x^2 + 15x - 9 + 9 =$$

$$= x^4 + 10x^3 + 25x^2 = x^2(x^2 + 10x + 25) = x^2(x+5)^2 =$$

$$= [x(x+5)]^2, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Fie $a \in \mathbb{N}$. Atunci $E(a) = [a(a+5)]^2$, deci $E(a)$ este pătratul unui număr natural.

Dar $a: \text{par} \Rightarrow a \cdot (a+5): \text{par}$

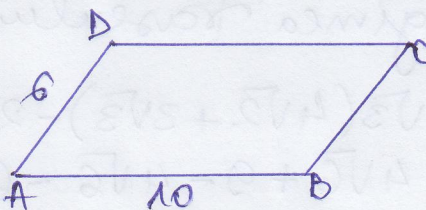
$a: \text{impar} \Rightarrow a+5: \text{par} \Rightarrow a \cdot (a+5): \text{par} \Rightarrow a(a+5): \text{par}$
pt. orice $a \in \mathbb{N}$

Prin urmare $E(a) = [a(a+5)]^2$ este pătratul unui număr natural par pentru orice nr. natural a , g. e. d.

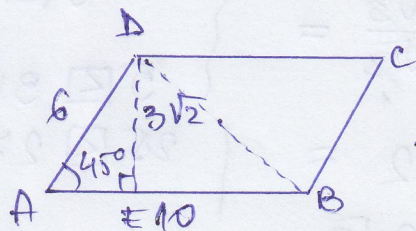
SUBIECTUL al III-lea: 1) a)

$$P_{ABCD} = 2 \cdot AB + 2 \cdot AD =$$

$$= 2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 20 + 12 = 32 \text{ (cm)}$$



b).



Ducem $DE \perp AB$ înălțimea paralelogramului.
 $A_{ABCD} = b \cdot i = AB \cdot DE$

$$\text{În } \triangle DEA \text{ cu } m(\hat{E}) = 90^\circ \text{ avem: } \sin 45^\circ = \frac{DE}{AD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{DE}{6} \Rightarrow$$

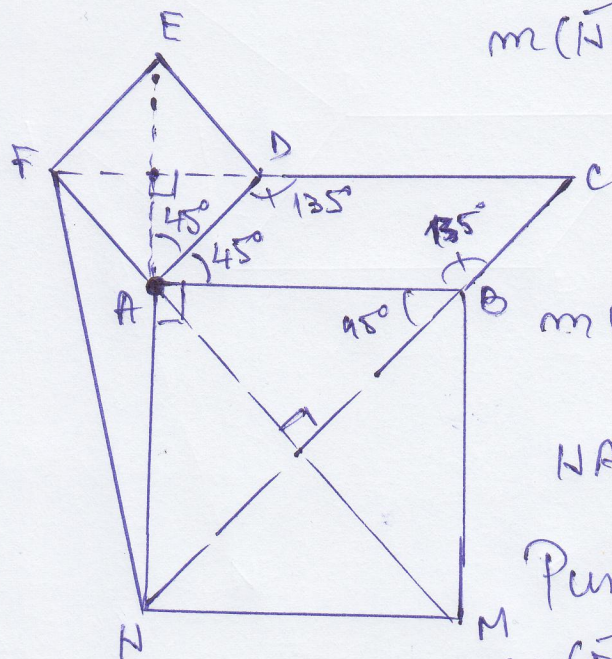
$$\Rightarrow DE = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ (cm.)}, A_{ABCD} = AB \cdot DE = 10 \cdot 3\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Obs: Puteam aplica formula $A_{\Delta} = \frac{a \cdot b \sin \hat{C}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{10 \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ}{2} = \frac{10 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{\triangle ABD} = 2 \cdot 15\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{) sau alte metode...}$$

c)



Punctele N, A, E: coliniare pentru că
 $m(\widehat{NAE}) = m(\widehat{NAB}) + m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAE}) =$
 $= 90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$

C, D, F: coliniare pentru că

$$m(\widehat{CDF}) = m(\widehat{CDA}) + m(\widehat{ADF}) =$$

$$= 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ.$$

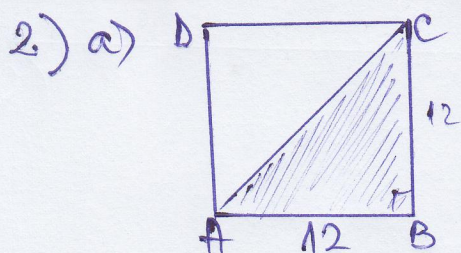
$$NA \perp AB \parallel CF \Rightarrow \underline{NA \perp CF} \quad (1).$$

Punctele F, A, M: coliniare pentru că
 $m(\widehat{FAM}) = m(\widehat{FAD}) + m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{BAM}) =$
 $= 90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$

N, B, C: coliniare pentru că
 $m(\widehat{NBC}) = m(\widehat{NBA}) + m(\widehat{ABC}) =$
 $= 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ.$

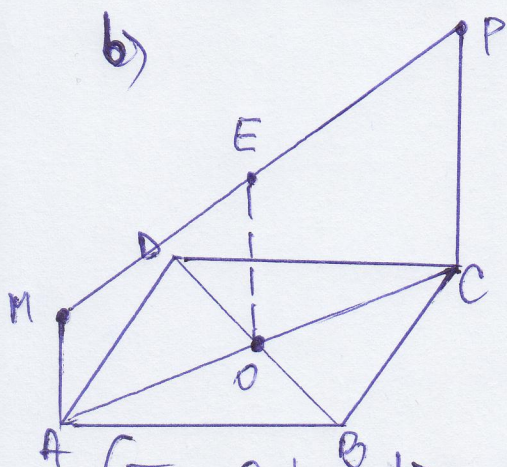
$$\underline{FA \perp AD \parallel CN \Rightarrow FA \perp CN} \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că FA și NA sunt două înălțimi ale $\triangle CFN$. Ambele fiind concurente în A $\Rightarrow$ A este ortocentrul $\triangle CFN$, g.e.d.



$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AB^2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 144 = 72 \text{ (cm}^2\text{)}$$



$PC \perp (ABC) \mid \Rightarrow AM \parallel PC$; $AM < PC \Rightarrow$
 $MA \perp (ABC) \mid$
 $\Rightarrow AMPC$: trapez (dreptunghiuc).
 O: mijlocul lui $[AC]$; E: mijlocul lui $[MP]$
 $\Rightarrow [EO]$: linie mijlocie în trapezul $AMPC \Rightarrow$
 $\Rightarrow EO \parallel PC \parallel AM.$

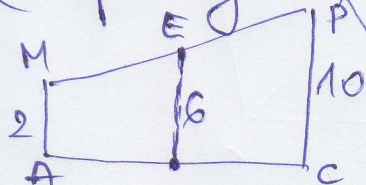
Dar $PC \perp (ABC) \mid \Rightarrow EO \perp (ABC)$, g.e.d.

(T.: O dreaptă paralelă cu o altă dr. $\perp$ pe plan este și ea $\perp$ pe pl.)

c) Pentru a demonstra că punctele H, N, P și Q sunt coplanare vom demonstra că dreptele MP și NQ sunt concurente în E , mijlocul lui $[MP]$. [Două drepte concurente sunt coplanare (determină un plan).]

$E \in [MP]$, fiind mijlocul său, rămâne de demonstrat că $E \in [NQ]$ (Vom demonstra chiar că E e mijlocul lui $[NQ]$).

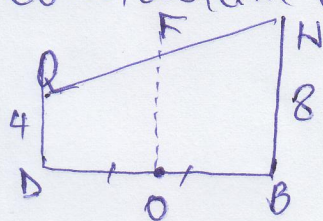
Pentru aceasta observăm că EO : linie mijlocie în trapezul (dreptunghi) $AMPC$, $AM = 2 \text{ cm}$, $PC = 10 \text{ cm} \Rightarrow EO = \frac{AM + PC}{2} =$



$$= \frac{10 + 2}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$$

Deci E se află pe perpendiculara în O pe planul pătratului $ABCD$ la 6 cm de O . (1)

Considerăm acum trapezul dreptunghi $BNQD$:



O : mijlocul lui $[BD]$

Ducem $OF \parallel BN$, $BN = 8 \text{ cm}$, $DQ = 4 \text{ cm} \Rightarrow$
 $BN \perp (ABC) \mid \Rightarrow OF \perp (ABC)$

$\Rightarrow OF$: linie mijlocie în trapezul $BNQD \Rightarrow OF = \frac{BN + QD}{2} = \frac{8 + 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$.

Deci $OF \perp (ABC)$; $OF = 6 \text{ cm}$

$OE \perp (ABC)$; $OE = 6 \text{ cm (1)}$ $\Rightarrow F = E$.

Deci $E \in NQ$, g.e.d.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 32

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	6	5p
2.	60	5p
3.	0	5p
4.	24	5p
5.	90	5p
6.	$\frac{1}{2}$	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează trapezul dreptunghic Notează trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $m(\angle DAB) = 90^\circ$ și bazele AB și CD	4p 1p
2.	$\overline{ab} = 6x + 5$, $\overline{ab} = 15y + 5$, unde x și y sunt câturile obținute în fiecare caz, deci numărul $\overline{ab} - 5$ este divizibil cu 6 și cu 15 $\overline{ab} - 5 \in \{30, 60, 90\}$, deci $\overline{ab} = 35$, $\overline{ab} = 65$ sau $\overline{ab} = 95$	2p 3p
3.	$\left(\frac{2}{3} \cdot x - 20\right) + \frac{3}{5} \left(x - \frac{2}{3} \cdot x + 20\right) + 15 + 65 = x$, unde x este lungimea traseului parcurs de automobil $x = 540$ km	3p 2p
4.	a) $a = 4\sqrt{6} + 9 - 2(2\sqrt{6} + 3) =$ $= 4\sqrt{6} + 9 - 4\sqrt{6} - 6 = 3$ b) $b = (3\sqrt{3} - 5) + 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - 5 + 3 - \sqrt{3} + 2 = 2\sqrt{3}$ $n = \frac{a+b}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ și, cum $3 < 2\sqrt{3}$, obținem $3 < \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{3+2\sqrt{3}}{2} < 2\sqrt{3}$, deci $n \in (3, 2\sqrt{3})$	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = (x^2 + 8x + 16 - 3x - 12 - 1)(x^2 + 5x - 3) + 9 = (x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x - 3) + 9 = (x^2 + 5x)^2 - 3^2 + 9 =$ $= (x^2 + 5x)^2$, pentru orice număr real x Pentru orice număr natural a , $E(a) = (a(a+5))^2$ și, cum a și $a+5$ sunt numere naturale de parități diferite, produsul lor este un număr natural par, deci $E(a)$ este pătratul unui număr natural par	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $ABCD$ este paralelogram, deci $P_{ABCD} = 2(AB + AD) =$ $= 2(10 + 6) = 32 \text{ cm}$	3p 2p
	b) Cum $m(\angle BAD) = 45^\circ$, $\triangle DAP$ este dreptunghic isoscel, unde $DP \perp AB$, $P \in AB$, deci $DP = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot DP = 10 \cdot 3\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ cm}^2$	2p 3p
	c) $ABCD$ este paralelogram și $m(\angle BAD) = 45^\circ$, deci $m(\angle ADC) = 135^\circ$ și $ADEF$ este pătrat, deci $m(\angle ADF) = 45^\circ$, de unde obținem $m(\angle CDF) = 180^\circ$, deci punctele C , D și F sunt coliniare și, cum $NA \perp AB$ și $AB \parallel CD$, obținem $NA \perp CF$ $m(\angle ABC) = 135^\circ$ și $ABMN$ este pătrat, deci $m(\angle ABN) = 45^\circ \Rightarrow m(\angle NBC) = 180^\circ$, deci punctele N , B și C sunt coliniare și, cum $FA \perp AD$ și $AD \parallel BC \Rightarrow FA \perp NC$ și, cum $NA \cap FA = \{A\}$, obținem că punctul A este ortocentrul triunghiului CFN	2p 3p
	2.	
	a) $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel, deci $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB^2}{2} =$ $= \frac{144}{2} = 72 \text{ cm}^2$	3p 2p
	b) $MA \perp (ABC)$ și $PC \perp (ABC) \Rightarrow MA \parallel PC$ și, cum O este mijlocul segmentului AC și E este mijlocul segmentului MP , obținem că EO este linie mijlocie în trapezul $ACPM$ $EO \parallel MA$ și $MA \perp (ABC)$, deci $EO \perp (ABC)$	3p 2p
	c) FO este linie mijlocie în trapezul $DBNQ$, unde F este mijlocul segmentului NQ , deci $FO \parallel NB$ și $FO = \frac{DQ + NB}{2} = 6 \text{ cm}$ $EO = 6 \text{ cm} \Rightarrow EO = FO$ și, cum $EO \perp (ABC)$, $FO \perp (ABC)$ și punctele E , F sunt situate de aceeași parte a planului (ABC) , obținem că E și F coincid, deci dreptele MP și NQ sunt concurente, de unde obținem că punctele M , N , P și Q sunt coplanare	2p 3p